

# Interpretaciones de la Mecánica Cuántica.

Por

VÍCTOR RIVERO ARRANZ

Tutor: Carlos Baladrón García

Trabajo Fin de Grado

21 de julio de 2016



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias



# Índice general

<b>Agradecimientos.</b>	<b>III</b>
<b>Resumen.</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes. . . . .	1
1.2. Axiomas de la Mecánica Cuántica. . . . .	2
1.3. ¿Se necesita una interpretación? . . . . .	5
<b>2. Clasificación de categorías.</b>	<b>9</b>
2.1. Formulaciones. . . . .	9
2.2. Interpretaciones. . . . .	12
2.3. Reconstrucción. . . . .	13
2.4. Teorías Subcuánticas. . . . .	13
<b>3. Interpretaciones Principales.</b>	<b>15</b>
3.1. Desarrollo a lo largo de la historia. . . . .	15
3.2. Interpretación de Copenhague. . . . .	18
3.3. Interpretación de De Broglie-Bohm. . . . .	19
3.4. Interpretación de Muchos Universos. . . . .	23
3.5. Modificación de los Axiomas. . . . .	25
3.5.1. Interpretación de Copenhague. . . . .	25
3.5.2. Interpretación de De Broglie-Bohm. . . . .	25
3.5.3. Interpretación de Muchos Universos. . . . .	26
3.6. Pilares de la racionalidad clásica. . . . .	27
3.6.1. Interpretación de Copenhague. . . . .	27
3.6.2. Interpretación de De Broglie-Bohm. . . . .	28
3.6.3. Interpretación de Muchos Universos. . . . .	28
3.7. Representación en ejes cartesianos. . . . .	28
3.8. Teoremas No-Go. . . . .	30
<b>4. Experimento de Young.</b>	<b>31</b>
4.1. Descripción del experimento. . . . .	31
4.2. Análisis en Copenhague. . . . .	33

4.3. Análisis en De Broglie-Bohm. . . . .	33
4.4. Análisis en Muchos Universos. . . . .	35
<b>Conclusiones.</b>	<b>39</b>

# Agradecimientos.

En primer lugar, agradecer a mis padres todo el esfuerzo que realizan a diario, pues sin ellos, no me encontraría aquí ahora mismo, finalizando estos 4 años con este trabajo. Agradecerles la educación y valores que nos han inculcado a mi hermano y a mí, además de darnos todo aquello que hemos necesitado siempre.

En segundo lugar, agradecer a mis amigos, esa segunda familia que todos tenemos, el estar siempre presentes para ayudarme con cualquier problema que haya surgido. Mencionar a Alberto Bravo, ex profesor y amigo, quien me guió en este camino para convertirme en físico y todo lo que ello conlleva.

Por otra parte, estos cuatro años han sido una experiencia que siempre llevaré conmigo. Muchos buenos y malos momentos vividos en ellos, aunque, sin duda, lo mejor que me llevo son todas esas personas que he conocido y me han acompañado, que en algunos casos, se han convertido en personas muy especiales.

Por último, agradecer toda la ayuda de mi tutor, Carlos Baladrón, en especial su cercanía y gran disponibilidad (en algunos casos, incluso nocturna). Sus observaciones y consejos han sido la ecuación guía para poder desarrollar este trabajo.

Muchas gracias a todos.



# Resumen.

En este trabajo se intenta dar un panorama general de las interpretaciones de la Mecánica Cuántica. En un principio, se plantea la discusión de si las interpretaciones son en sí necesarias y se analizan las posibles categorías en las que se podrían clasificar los esquemas de revisión de la Mecánica Cuántica. A continuación, se introduce un breve desarrollo histórico de la aparición y evolución de las distintas interpretaciones de la Mecánica Cuántica y se hace un estudio de algunas de las más destacadas.

Por otra parte, se realiza un análisis comparativo de las soluciones que cada una de las interpretaciones consideradas aporta al estudio del significado de la teoría cuántica y de las dificultades que conlleva. Por último, se analiza, con cada una de ellas, el experimento de la doble rendija de Young.



# Capítulo 1

## Introducción a las interpretaciones de la Mecánica Cuántica.

*“Mucha gente no entiende esto, pero no es que yo sea alguien increíble. Simplemente soy lo suficientemente inteligente como para rodearme de personas más inteligentes que yo y hacer caso de lo que dicen.”*

– Gregg Popovich.

### 1.1. Introducción histórica a la Física Cuántica.

De acuerdo con la física clásica, la intensidad del espectro de radiación del cuerpo negro crecería ilimitadamente con frecuencias crecientes, lo que se llamó catástrofe ultravioleta. Planck, en 1900, demostró que si los átomos de la cavidad que constituyen el cuerpo negro, sólo intercambian una cantidad discreta de energía  $h\nu$ , donde  $\nu$  es la frecuencia de la radiación electromagnética y  $h$  es la llamada constante de Planck, entonces la catástrofe ultravioleta desaparecía. El hecho de que la absorción y la emisión de energía se produzca en forma discreta está en conflicto con los principios de la física clásica. Pocos años después, Albert Einstein, utilizó la hipótesis de Planck en su explicación del efecto fotoeléctrico. Sugirió que las ondas de luz estaban cuantizadas, y que la cantidad de energía que cada cuanto de luz podría portar, era exactamente  $h\nu$ .

El siguiente paso se dio en 1911 cuando Ernest Rutherford realizó algunos experimentos disparando partículas alfa contra una lámina de oro. Basándose

en los resultados obtenidos se podría establecer un modelo del átomo en el que el átomo consistía en un núcleo pesado con una carga positiva rodeado de electrones cargados negativamente. También este modelo estaba en conflicto con las leyes de la física clásica. De acuerdo con la Mecánica Clásica y la Electrodinámica Clásica, se podría esperar que los electrones en órbita alrededor de un núcleo cargado positivamente emitirían continuamente radiación de manera que el átomo sería inestable. Fue en este punto donde Niels Bohr entró en la escena. En 1913 Bohr, visitando a Rutherford en Manchester, propuso un modelo matemático del átomo (modelo de Bohr) que proporcionó el primer soporte teórico para el modelo de Rutherford y podría explicar el espectro de emisión del átomo de hidrógeno.

La teoría se basa en dos postulados:

- Un sistema atómico sólo es estable en un determinado conjunto de estados, llamados estados estacionarios, cada estado está asociado con una energía discreta, y cada cambio de energía corresponde a una transición completa de un estado a otro.
- La posibilidad de que el átomo pueda absorber y emitir radiación se determina por una ley según la cual la energía de la radiación viene dada por la diferencia de energía entre dos estados estacionarios igual a  $h\nu$ .

Entre 1913 y 1925 Bohr, Arnold Sommerfeld y otros fueron capaces de mejorar el modelo de Bohr. En 1925 Werner Heisenberg, en ese momento el ayudante de Bohr en Copenhague, estableció los principios básicos de la Mecánica Cuántica con su formulación matricial. Al año siguiente, Erwin Schrödinger dio una formulación más simple de la teoría en la que se introduce una ecuación diferencial lineal para una función de onda. Él mismo intentó una interpretación clásica en gran medida de la función de onda. Sin embargo, ya el mismo año Max Born propuso una interpretación estadística consistente en la que el cuadrado del valor absoluto de esta función de onda expresa una densidad de probabilidad para el resultado de una medición. Fue Paul Dirac, en 1926, el que demostró que las formulaciones de Heisenberg y Schrödinger eran equivalentes y que, junto a von Neumann, desarrollaron la formulación matemática (formulación canónica) de la Mecánica Cuántica. Dicha formulación canónica se basa en un conjunto de media docena de postulados, los cuales podemos ver en la siguiente sección.

## 1.2. Axiomas de la Mecánica Cuántica.

En esta sección desarrollaremos los axiomas o postulados de la Mecánica Cuántica tal y como se muestran en la mayoría de los textos (interpretación

ortodoxa de la Mecánica Cuántica)[1]. Para ello, definiremos primeramente el concepto de estado cuántico de una partícula tal y como se muestra en estos.

Primeramente, caractericemos el estado a un tiempo  $t$  dado, por una función de onda de cuadrado integrable,  $\psi(\vec{x}, t)$ . A continuación, podemos asociar a esta un ket o vector de estado,  $|\psi\rangle$ , perteneciente a un espacio de estados  $\varepsilon$  de un espacio de Hilbert. Por lo tanto, el estado cuántico de una partícula a un tiempo fijo, esta caracterizado por un ket que pertenece a un espacio  $\varepsilon$ . De esta forma, el concepto de estado puede ser generalizado a cualquier sistema físico. De acuerdo con esto, enunciemos los axiomas sobre los que se edifica toda la Mecánica Cuántica.

- **Primer Axioma:** A un tiempo fijo  $t_0$ , el estado de un sistema físico esta definido por un ket específico  $|\psi(t_0)\rangle$  perteneciente al espacio de estados  $\varepsilon$ .

Nótese que como  $\varepsilon$  es un espacio de estados, este primer axioma, implica el principio de superposición, el cual nos dice que una combinación lineal de vectores estado es también un vector de estado.

- **Segundo Axioma:** Toda cantidad física medible  $\mathcal{A}$  esta descrita por un operador  $A$  actuando en el espacio de estados  $\varepsilon$ ; este operador es un observable.

Definiendo observable como cualquier operador hermítico, i.e.,  $A^+ = A$ , cuyos vectores propios formen una base del espacio de estados.

- **Tercer Axioma:** El único resultado posible de la medida de una cantidad física  $\mathcal{A}$  es uno de los valores propios del correspondiente observable  $A$ .

Luego al medir  $\mathcal{A}$  siempre obtendremos un valor real debido a que  $A$  es hermítico por definición.

*Demostración.* Sea  $A$  un operador hermítico con vectores propios  $|\phi\rangle$  tal que  $A|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$ . Si proyectamos esta ecuación sobre el bra  $\langle\phi|$  tendremos que:

$$\langle\phi|A|\phi\rangle = \lambda\langle\phi|\phi\rangle$$

Dado que  $A$  es hermítico, entonces  $\langle\phi|A|\phi\rangle$  es un número real ya que:

$$(\langle\phi|A|\phi\rangle)^* = \langle\phi|A^+|\phi\rangle = \langle\phi|A|\phi\rangle$$

Entonces, dado que  $\langle\phi|A|\phi\rangle$  y  $\langle\phi|\phi\rangle$  son reales, la primera ecuación implica que  $\lambda$  es real. ■

Antes de ver el cuarto postulado, vamos a considerar que el espectro de un observable  $A$  es totalmente discreto. Consideremos además los autovalores  $a_n$  de  $A$  asociados a los autovectores  $|u_n^i\rangle$  de  $A$  donde el índice  $i$  denota la posible degeneración del autovalor  $a_n$ . Luego podemos ver que se cumple que:

$$A |u_n^i\rangle = a_n |u_n^i\rangle \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, g_n$$

Ahora bien, dado que  $A$  es un observable, los vectores  $|u_n^i\rangle$  formaran una base ortonormal de estados  $\{|u_n^i\rangle\}$  del espacio de estados. Luego podemos expandir cualquier vector de estado  $|\psi\rangle$  en dicha base tal que:

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$$

- **Cuarto Axioma:** Cuando una cantidad física  $\mathcal{A}$  es medida en un sistema en el estado normalizado  $|\psi\rangle$ , la probabilidad  $P(a_n)$  de obtener el autovalor  $a_n$  del correspondiente observable  $A$  es:

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2$$

- **Quinto Axioma:** Si la medida de la cantidad física  $\mathcal{A}$  en un sistema en el estado  $|\psi\rangle$  da el resultado  $a_n$ , el estado del sistema inmediatamente después de la medida es la proyección normalizada de  $|\psi\rangle$  en el subespacio asociado con  $a_n$ , i.e.,

$$\frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_n | \psi \rangle}}$$

donde  $|\psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle$ , como ya habíamos dicho, y  $P_n = |u_n^i\rangle \langle u_n^i|$ .

Por lo tanto, el estado del sistema inmediatamente después de la medida, i.e., que al sistema no le ha dado tiempo a evolucionar, es siempre un estado propio de  $A$  con autovalor  $a_n$ .

- **Sexto Axioma:** La evolución temporal de el vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

donde  $H(t)$  es el observable asociado con la energía total del sistema, denominado operador Hamiltoniano.

## 1.3. Discusión sobre la necesidad de una interpretación.

Al introducirnos en el mundo microscópico, la forma de pensamiento que tenemos, i.e. , nuestra forma clásica de ver las cosas, parece dejar de ser válida. Nuestra lógica, nuestros conceptos y métodos clásicos parecen ser insuficientes cuando entramos en este territorio, el cual está gobernado por la Mecánica Cuántica. El significado físico de la estructura matemática de la teoría cuántica, y la explicación de lo que está ocurriendo realmente en la naturaleza, e incluso si esta explicación es posible o no, siguen siendo preguntas abiertas a un gran número de interpretaciones.

El cuerpo matemático de la teoría cuántica se considera como punto de partida independientemente de las interpretaciones[2]. Estas comparten el núcleo matemático sobre el que, en cada interpretación, se introducen modificaciones axiomáticas o modificaciones sobre el significado de ciertas entidades o símbolos matemáticos con la limitación de no producir alteraciones en las predicciones observacionales de la teoría.

La interpretación de Copenhague fue el primer intento, en general, para comprender el mundo cuántico. Sus padres fundadores fueron principalmente Niels Bohr, Werner Heisenberg y Max Born. De hecho, Bohr y Heisenberg no estuvieron totalmente de acuerdo sobre la manera de entender el formalismo matemático de la mecánica cuántica, y ninguno de ellos usó el término “interpretación de Copenhague” como un nombre común para sus ideas[3]. El término es más bien una etiqueta introducida por las personas que se oponían a la idea de complementariedad de Bohr, para identificar lo que vieron como características comunes detrás de la interpretación de Bohr-Heisenberg, ya que esta se empezó a desarrollar, aproximadamente, a partir de 1926. El término de “interpretación” aparece por primera vez en 1955 con la exposición del concepto de complementariedad de Heisenberg, y no de Bohr (aunque fue este el que pensó esta idea originalmente), haciendo énfasis en un papel privilegiado del observador y en el colapso de la función de onda inducida por este.

Para algunos científicos la Mecánica Cuántica no tiene la necesidad de una interpretación más allá de su propia coherencia interna, sin embargo, otros creen que se necesita una interpretación para poder explicar lo que sucede en la naturaleza[4]. Aun así, podríamos decir que el hecho de creer que no se necesita una interpretación para explicar la Mecánica Cuántica es en sí una interpretación.

Concretando, lo que nos dice la corriente que cree que no es necesaria una interpretación, lo que se conoce como “instrumentalismo”, es que para el uso de la teoría cuántica y la comprensión de su naturaleza, solamente es necesaria

su consistencia interna, i.e., su formalismo matemático, ya que este induce su propia explicación. Los instrumentalistas defienden que la función de onda no es una entidad real, es decir, no existe como tal, al igual que el colapso es algo que ocurre en nuestra descripción del sistema y no al sistema en sí mismo. Para ellos, la función de onda es únicamente una expresión matemática para evaluar probabilidades y por lo tanto, las contradicciones surgen al atribuir realidad a los estados cuánticos[5].

Desde el punto de vista instrumentalista, existe una tentación de creer que todo sistema cuántico en observación tiene una función de onda asociada, incluso si la función de onda no se conoce de manera explícita, ya que si no, no se podrían explicar los resultados de las mediciones, pues desde el punto de vista instrumentalista, es el cuadrado de la función de onda lo que tiene un sentido real. Esto se debe a que en la Mecánica Clásica los puntos del espacio de fases corresponden a datos objetivos, mientras que en la Mecánica Cuántica, los puntos del espacio de Hilbert corresponden a estados cuánticos. El atribuir realidad a los estados cuánticos conduce a una serie de "paradojas cuánticas". Esto se debe, desde la perspectiva instrumentalista, a una interpretación incorrecta de la teoría cuántica. Cuando se utiliza correctamente, la teoría cuántica nunca cede dos respuestas contradictorias a una pregunta bien planteada.

El propósito común de todas las interpretaciones, es el deseo de solucionar los problemas derivados de la particular estructura matemática de la Mecánica Cuántica, alejada del formalismo de la Mecánica Clásica, y establecer una conexión entre los métodos matemáticos de la teoría y los resultados y observaciones experimentales.

Para tratar de obtener una mejor comprensión, se carga la Mecánica Cuántica con variables ocultas, múltiples universos, reglas de consistencia, o colapso espontáneo, según la interpretación que se trate. Sin embargo, la visión instrumentalista, incluso en el caso de que hubiera una realidad objetiva, argumenta, que esto no tiene importancia en la práctica de la teoría.

Por lo tanto, con esta discusión vemos que para los instrumentalistas, una interpretación es un sentido meramente filosófico, y por lo tanto no forma parte de la física. Por otro lado, aquellos que son partidarios de ellas, opinan lo contrario. Hemos de notar, dentro del marco de estos últimos, que si una interpretación alterara las predicciones de los experimentos, esta dejaría de serlo.

Los problemas interpretativos que surgen en la Mecánica Cuántica son:

- *Diferencias entre Mecánica Clásica y Mecánica Cuántica.* En la Mecánica Cuántica se utiliza un desarrollo matemático más complicado que en la Mecánica Clásica. En ambos marcos se trabaja en espacios distintos, espacio de fases en la Mecánica Clásica y espacio de Hilbert en Mecánica

Cuántica. A su vez, en la Mecánica Clásica, los objetos se ven representados por su posición  $\vec{x}$  y momento  $\vec{p}$  bien definidos, mientras que en el caso cuántico (en la visión ortodoxa que se ve en la mayoría de los textos) se ven representados por su vector de estado  $|\Psi\rangle$ . Además, las magnitudes físicas que son representadas por una función en el espacio de fases, son representadas por un observable en el espacio de Hilbert.

- *La interpretación de la función de onda.* Pues no sabemos si esta es un ente físico real o simplemente una herramienta matemática que almacena todo lo que podemos saber acerca del sistema que estemos tratando.

Existe la posibilidad de añadir variables ocultas al sistema para poder completar su descripción. Sin embargo, esta adición de variables ocultas seguirían llevando a problemas de violación de los pilares de la racionalidad clásica.

- *Dos tipos de evolución según la medida.* Cuando no estamos midiendo un sistema, este evoluciona libremente con la ecuación de Schrödinger (sexto axioma), sin embargo, cuando realizamos una medida del sistema se produce una evolución según el fenómeno de colapso, en el que se obtiene un único resultado de todos los posibles (tercer axioma) y el estado resultante es la proyección del estado inicial en el subespacio asociado al autovalor obtenido.
- *Superposición de estados.* Esta característica está asociada a la linealidad del espacio de Hilbert y de la ecuación de Schrödinger.
- *“Entanglement” (Entrelazamiento).* Propiedad asociada a las correlaciones no-clásicas que se pueden establecer entre sistemas cuánticos separados[6].

Además de estos problemas, aparecen otros como el problema relacionado con la incompatibilidad de la Mecánica Cuántica con la Relatividad General, i.e., la búsqueda de una teoría de la gravedad cuántica. Otra problema, aunque podría sonar a motivación, es la información cuántica, en especial el posible desarrollo de un ordenador cuántico para resolver problemas computacionales que no pueden ser realizados eficientemente por una computadora clásica.



# Capítulo 2

## Clasificación de categorías de análisis de la Mecánica Cuántica.

Con la introducción de la Mecánica Cuántica todo científico se vio, y se ve, obligado a sacrificar al menos una de las tres siguientes propiedades clásicas en la descripción de la naturaleza: realidad, causalidad y localidad[7]. Como consecuencia de esta situación, insatisfactoria para muchos físicos, hemos visto desde el inicio de la Mecánica Cuántica una proliferación de diferentes enfoques que van desde la reformulación matemática de la teoría hasta el estudio de posibles teorías subyacentes de la Mecánica Cuántica. Estos diferentes enfoques en el estudio de la Mecánica Cuántica se pueden clasificar en cuatro categorías cuyas fronteras son un tanto difusas[8].

### 2.1. Formulaciones.

En primer lugar nos encontramos las diferentes formulaciones de la mecánica cuántica.

Esta categoría está constituida por aquellos enfoques que reformulan matemáticamente la teoría cuántica, pero que conducen a idénticas predicciones para los resultados experimentales. Este tipo de reconstrucción matemática está relacionada con la simplificación que permiten para ciertos tipos de problemas[9], ya sea técnica o conceptualmente, o incluso para su extensión a nuevas situaciones.

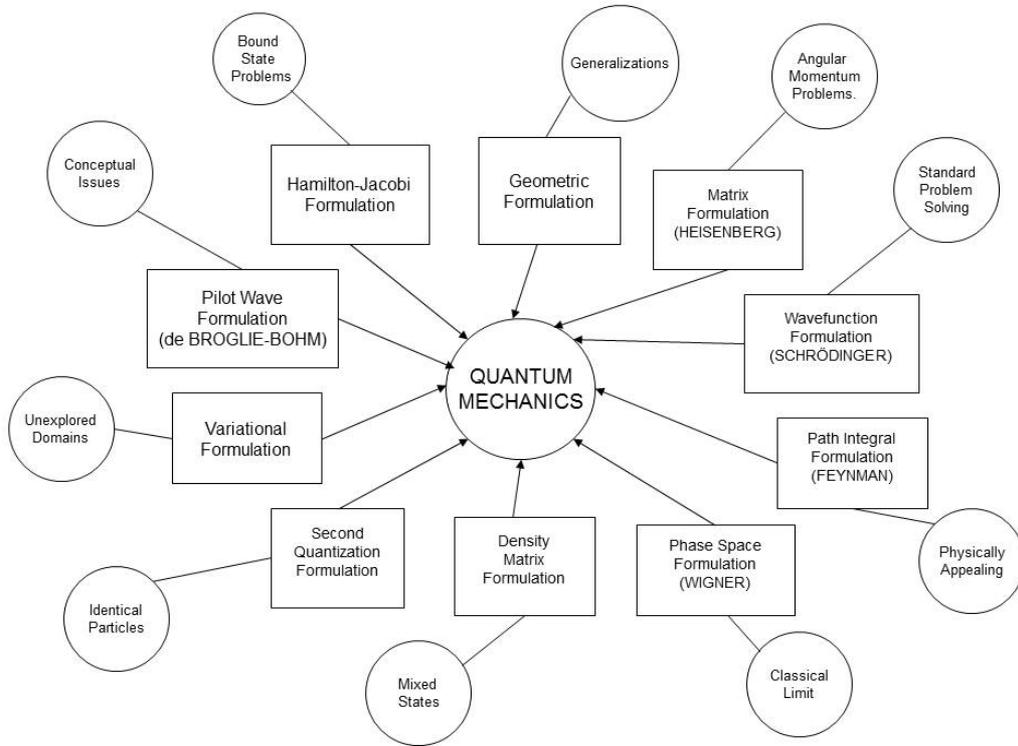


Figura 2.1: Esquema de las diferentes formulaciones de la Mecánica Cuántica.

Para un mejor entendimiento, veamos que esta reconstrucción matemática también está presente en la mecánica newtoniana, pues en esta existen diferentes tipos de formulaciones como pueden ser la formulación Lagrangiana, Hamiltoniana o la propia Newtoniana. Nótese que los resultados, en cualquiera de ellas, son siempre los mismos, sin embargo, las formulaciones son diferentes. Se utilizan distintas definiciones de las herramientas utilizadas: Lagrangiano, Hamiltoniano, Fuerza. Pero lo que en la Mecánica Clásica es, por lo general, sólo una forma diferente de representar un problema mientras se mantiene el corazón conceptual de la teoría, en la Mecánica Cuántica una reformulación matemática puede influir drásticamente en la interpretación conceptual. Un sencillo ejemplo que nos podría ayudar a entender esto sería la comparación entre la representación de Heisenberg y la de Schrödinger. Esta última es el esquema estándar para resolver la mayoría de problemas debido a su formalismo matemático más simple. Sin embargo, la formulación de Heisenberg supera, conceptualmente, a la de Schrödinger para explicar los sistemas y procesos físicos[10]. En particular, la formulación de Heisenberg nos permite rastrear el flujo local de la información en cualquier proceso físico pues en esta representación, son los observables y no los estados como en la representación de Schrödinger, los que varían con el tiempo. Veamos una analogía, que nos permita entender mejor esto último.

**Analogía:**

Supongamos que lanzamos una pelota y le hacemos una foto a tiempo  $t_1$  y otra a tiempo  $t_2$  (el tratar con un objeto clásico como es una pelota no influye en nada en el ejemplo, simplemente es para su mejor comprensión). La representación de Heisenberg correspondería con las imágenes realizadas en sí. Por otro lado, la representación de Schrödinger se correspondería con los bits que representan dichas imágenes en la tarjeta de memoria de la cámara. Notemos entonces, que en la representación de Heisenberg (las imágenes) podemos ver cómo ha evolucionado el sistema (la pelota), pues tenemos dos imágenes en momentos de tiempo distintos en las que podemos rastrear el flujo local de la información, i.e., la trayectoria de la pelota, y por lo tanto notar la localidad de esta formulación.

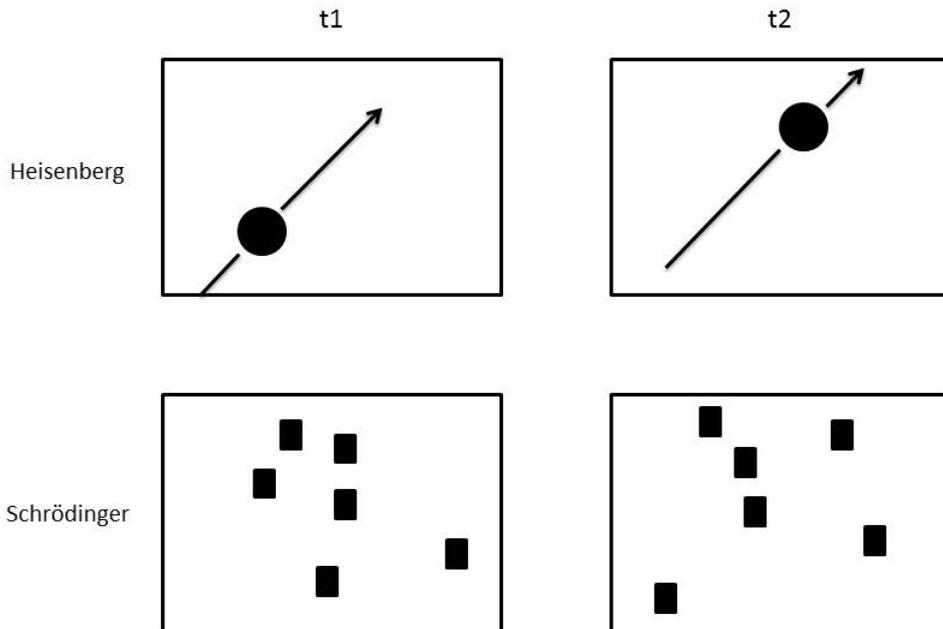


Figura 2.2: Esquema conceptual de la analogía.

Sin embargo, dentro de la tarjeta de memoria, i.e., en la representación de Schrödinger, no tiene por qué existir evolución local (contigüidad) a las posiciones de los bits de información dado que el propósito de la representación es codificar y almacenar la información de forma comprimida y eficiente.

Notemos entonces que al pasar de una representación a otra, perdemos poder explicativo. Entonces, podemos ver que aunque el mérito de la mayoría de las formulaciones de la Mecánica Cuántica reside en permitir un tratamiento matemático sencillo para cierto tipo específico de problemas, en algunos casos va mucho más allá, de tal manera que incluso las formulaciones no pueden considerarse completamente neutrales con respecto a las interpretaciones.

Cada una de las formulaciones que aparecen en la figura de arriba, facilitan alguna aplicación o alguna faceta de la teoría de forma más eficiente. La formulación matricial de Heisenberg, que fue la primera formulación desarrollada, es útil en la solución de problemas de oscilador armónico y momentos angulares, pero para otros problemas puede resultar bastante complicada. La formulación de la función de onda de Schrödinger (formulación estándar) es útil para resolver la mayoría de los problemas, pero el análisis conceptual, puede resultar más complicado. La formulación del camino integral de Feynman es físicamente atractiva y se generaliza fácilmente más allá del dominio de la Mecánica Cuántica no relativista, pero es muy laboriosa en la mayoría de las aplicaciones. La formulación del espacio de fases de Wigner es útil al considerar el límite clásico. La formulación de la matriz densidad puede tratar los estados mixtos (mezclas estadísticas) con facilidad, por lo que es de gran valor en Mecánica Estadística. Para lo mismo sirve la formulación de la segunda cuantización, que es particularmente importante cuando se trata con un gran número de partículas idénticas. La formulación variacional, la cual es raramente la mejor herramienta para aplicaciones, es importante a la hora de extender la Mecánica Cuántica a nuevas situaciones inexploradas. La formulación de la onda piloto de De Broglie y Bohm que trae algunas cuestiones conceptuales. La formulación de Hamilton-Jacobi que parece prometedora para resolver, de lo contrario intratable, ciertos problemas de estados ligados.

## 2.2. Interpretaciones.

La segunda categoría estaría formada por las interpretaciones de la Mecánica Cuántica. Este tipo se compone de aquellos enfoques que siguen produciendo los mismos resultados numéricos para cualquier experimento, pero en el que la naturaleza ontológica o epistemológica de algunos objetos matemáticos de la teoría puede ser diferente y ciertos postulados pueden modificarse o expresarse de otra forma, con la restricción de no producir ninguna alteración observacional en el estado de la técnica experimental. Algunos ejemplos de esta categoría son: la interpretación de Copenhague, De Broglie-Bohm, Muchos Universos (Many Worlds), simetría temporal (Time-symmetric). Podríamos nombrar muchas más, pero incluso después de tratar de hacer una lista completa de las interpretaciones surge un problema relacionado con el hecho de que varias interpretaciones admiten una subdivisión de acuerdo a las diferentes formas en que ciertos conceptos son tratados dentro de su propia interpretación.

Antes de seguir con la tercera categoría vamos a hacer énfasis en que los conceptos de formulación e interpretación son distintos, aunque la división no está perfectamente definida.

formulación  $\neq$  interpretación

## 2.3. Reconstrucción.

El tercer nivel está constituido por lo que se puede denominar reconstrucción, el cual está formado por esquemas más profundos, generalmente relacionados con el concepto de información, cuyo objetivo es la obtención de los postulados de la Mecánica Cuántica estándar a partir de un conjunto de postulados más simples o naturales. En otras palabras, este enfoque intenta explicar por qué se postulan los axiomas de la Mecánica Cuántica estándar de la forma en que los conocemos.

## 2.4. Teorías Subcuánticas.

La cuarta y más profunda categoría está formada por las llamadas teorías subcuánticas, aquellas que exploran la posibilidad de una realidad subyacente a la Mecánica Cuántica. Un elemento clave que caracteriza esta categoría es la posibilidad de realizar o formular algunas pruebas experimentales que nos permitan discriminar entre la Mecánica Cuántica y la teoría rival. En la siguiente figura podemos ver algunas teorías subcuánticas.

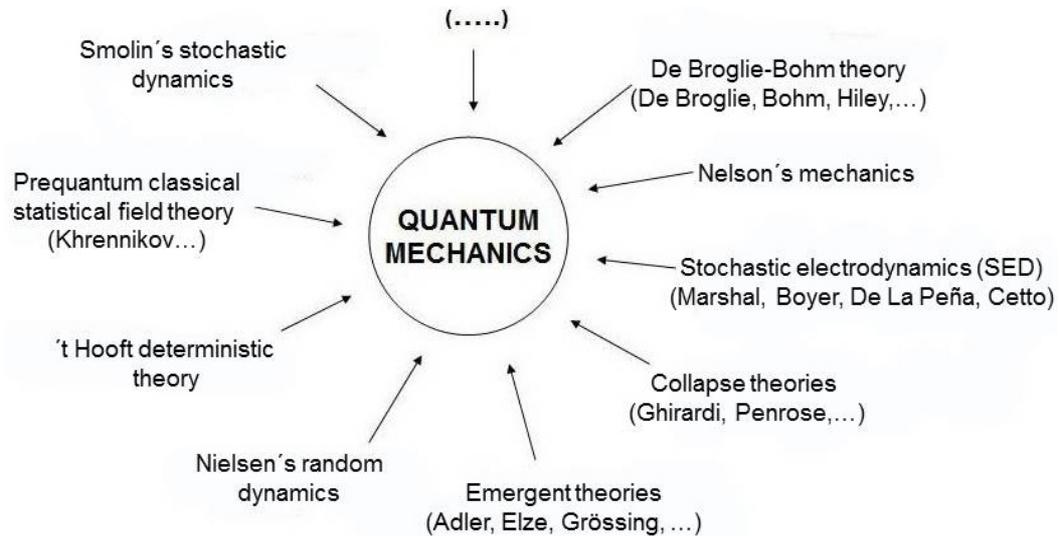


Figura 2.3: Esquema de algunas de las teorías subcuánticas de la Mecánica Cuántica.

Como podemos ver en el título, en este trabajo vamos a analizar el papel desempeñado por las interpretaciones en el marco de la teoría cuántica.



# Capítulo 3

## Interpretaciones Principales de la Mecánica Cuántica.

### 3.1. Desarrollo de las interpretaciones a lo largo de la historia.

El inicio de la física cuántica, junto con los debates sobre su interpretación son algunos de los temas más centrales en la historia de la física del siglo XX. Su desarrollo estuvo marcado por una visión teórica totalmente nueva, la cual debía interpretarse para dar cuenta de ciertas observaciones experimentales como la radiación del cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico y los espectros atómicos.

Fue von Neumann, fundamentalmente, el que se encargó axiomatizar la Mecánica Cuántica y de dar cuenta de lo que se conoce como interpretación ortodoxa (la habitual que se muestra en los textos) y que se confunde frecuentemente con la interpretación de Copenhague, cuya diferencia crucial se encuentra en la interpretación del estado cuántico. El padre de esta última fue Niels Bohr junto con Werner Heisenberg y Max Born (aunque cada uno de ellos con diferencias sutiles en sus interpretaciones), aproximadamente en 1926. Estos, junto a otros, desarrollaron la Mecánica Cuántica, y su interpretación se fue completando a lo largo de las siguientes décadas. El resultado fue lo que se bautizó a mitad de los años 50 como interpretación de Copenhague. Fue alrededor de este año cuando aparecen dos nuevas interpretaciones que intentan romper con el no realismo que mantiene la interpretación de Copenhague. Estas fueron la interpretación de De Broglie-Bohm, la cual fue desarrollada por Louis De Broglie en 1927 y retomada por David Bohm en 1952, y la interpretación de Muchos Universos, desarrollada por Hugh Everett. El hecho de que se tardara tanto en desarrollar otras posibles interpretaciones se debió principalmente al buen funcionamiento de la teoría. El desarrollo de la bomba nuclear y del radar, el descubrimiento de nuevas partículas, la

fijación de la electrodinámica cuántica y un enfoque renovado para la física del estado sólido llamaban toda la atención de los físicos. Podríamos decir, de forma un poco burda, que la forma de pensar de la época sería algo así como: “Si esto funciona, ¿para qué buscar más?” de aquí la famosa frase de David Mermin, “Shut up and calculate”. Luego, en la primera mitad del siglo XX, el antirrealismo (haciendo referencia a esta palabra desde la interpretación de Copenhague) estaba principalmente influido por el positivismo lógico, el cual pretendía centrarse en aspectos observables de la realidad de la teoría científica.

En 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen realizaron un experimento mental, conocido posteriormente como la paradoja EPR, cuya idea principal era demostrar que la función de onda no proporcionaba una descripción completa de la realidad física, y que por lo tanto, la interpretación de Copenhague no sería satisfactoria. Fue este hito, además de los profundos cambios en el contexto social y cultural de la investigación fundamental tras la Segunda Guerra Mundial, lo que impulsó, en la década de los años 50, la aparición de las dos interpretaciones sobre las que hemos hablado en el párrafo anterior, y en consecuencia, la causa de la disminución de la supremacía de la interpretación de Copenhague.

La interpretación de De Broglie-Bohm, considerada como una interpretación de variables ocultas, llevaba a un problema de no localidad, lo que indujo a John Stewart Bell, en 1964, a analizar la posible no localidad de la teoría cuántica y desarrollar el teorema que lleva su nombre, el cual nos dice que: ninguna interpretación de variables ocultas locales puede reproducir todas las predicciones de la Mecánica Cuántica. La interpretación del teorema o desigualdad de Bell suscitó desde el principio una intensa polémica comenzando con la determinación de las hipótesis implícitas del teorema. Aspect et al, en 1982, demostraron experimentalmente que la desigualdad de Bell se violaba para sistemas compuestos entrelazados. Sin embargo, la dificultad técnica del experimento dejaba abiertas ciertas lagunas (loopholes) que permitían albergar ciertas reservas sobre el resultado concluyente del experimento. En 2015, tres experimentos independientes han conseguido cerrar simultáneamente todos estos loopholes[11].

La aparición de la desigualdad de Bell relanzó el interés por los fundamentos e interpretaciones de la Mecánica Cuántica. Comenzó en la década de 1950, se alzó en la década de 1980 y mediados de la década de 1990 y siguen aumentando en la actualidad. Aun con el nacimiento de subinterpretaciones dentro de las corrientes principales de Bohm y Muchos Universos, la escuela de Copenhague seguía teniendo su gran importancia, lo que llevaría con el paso de los años a que se desarrollaran nuevas y distintas interpretaciones (herederos de Copenhague).

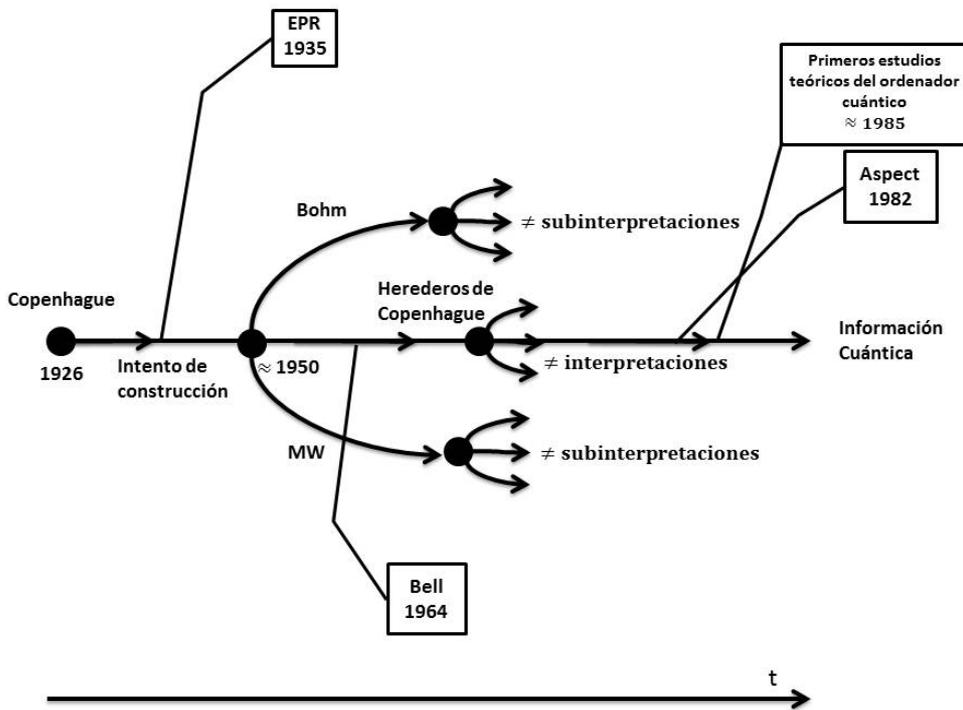


Figura 3.1: Desarrollo histórico de las interpretaciones y los hitos relevantes.

Debemos decir que todas las diferentes interpretaciones presentan características insatisfactorias, lo cual explica que ninguna de ellas haya obtenido un apoyo total tanto de físicos como de filósofos. Aunque lo deseable sería llegar a un consenso en el que todas las interpretaciones desemboquen en una única interpretación.

Hoy en día, los debates sobre la Mecánica Cuántica no demuestran ninguna muestra de disminución. La insatisfacción de que ninguna de las interpretaciones explicara (y explique) de forma correcta la Mecánica Cuántica y los distintos objetivos que podrían conseguirse de hacerlo, llevaron a hacer encuestas en la comunidad científica, con el fin de conocer las ideas globales y hacer correlaciones entre estas. En estas encuestas, se hacían preguntas relacionadas con el papel del observador, los diferentes puntos de vista relacionados con las diferentes interpretaciones, la definición a priori de las propiedades de los sistemas cuánticos independientemente de su medición, las reconstrucciones de la teoría cuántica, la posibilidad de crear un ordenador cuántico, el problema de medida, etc. Los resultados de las encuestas varían drásticamente de un congreso a otro dependiendo de la inclinación interpretacional de los científicos participantes[12][13].

## 3.2. Interpretación de Copenhague.

La interpretación de Copenhague fue el primer intento de interpretación para comprender el mundo cuántico. Aunque hemos de resaltar, como se dijo en el desarrollo histórico, que von Neumann, ya dio cuenta de lo que se conoce como interpretación ortodoxa y que se confunde frecuentemente con la interpretación de Copenhague, cuya diferencia crucial se encuentra en el estado cuántico. Sus principales fundadores fueron Niels Bohr y Werner Heisenberg, sin embargo, otros físicos también hicieron importantes contribuciones, como Max Born con la interpretación probabilística de la función de onda. La interpretación de Copenhague está ligada al indeterminismo[3], i.e., los acontecimientos futuros no están completamente determinados por los acontecimientos pasados. En la interpretación de Copenhague, se prohíben preguntas como: “¿Dónde se encuentra la partícula antes de que se haga la medición?” ya que dentro de esta interpretación no tiene ningún sentido preguntarse esto, pues lo único que podemos conocer es el resultado de la medición que hacemos.

De acuerdo con esta interpretación, los sistemas físicos no tienen en general propiedades definidas antes de ser medidos, y la Mecánica Cuántica sólo puede predecir las probabilidades de los resultados que producen las mediciones. El acto de medir afecta al sistema, haciendo que el conjunto de probabilidades se reduzca a sólo uno de los posibles valores inmediatamente después de la medición. Este proceso se conoce como colapso de la función de onda. En la medición, el sistema estaría en un “enredo” (entanglement) con el aparato de medida, en el que se consideran todos los posibles resultados, es entonces este colapso de la función de onda el que permite quedarse solamente con uno de los posibles resultados. Todo lo que se puede conocer acerca de un sistema antes de una observación se encapsula en una función de onda  $\Psi(\vec{x}, t)$ , la cual evoluciona sin problemas en el tiempo mientras el sistema se encuentre aislado de otros sistemas.

Dentro de esta interpretación hemos de destacar también el hecho de que la función de onda es una herramienta matemática, i.e., no tiene un sentido físico, no es algo físicamente real. Bohr habló del formalismo matemático de la Mecánica Cuántica, incluyendo la función de onda o vector de estado, como una representación epistemológica.

Los sistemas cuánticos no pueden ser visualizados de forma directa en el espacio físico tridimensional como si se tratase de un sistema clásico, ya que sus estados no pueden ser localizados en el espacio y el tiempo. La razón que da esta interpretación es que un sistema cuántico no tiene ningún estado cinemático o dinámico definido antes de cualquier medición. Por lo tanto, el vector de estado es epistemológico, una herramienta para calcular probabilidades de observables.

El punto de vista de Bohr no siempre fue el mismo, pues este fue cambiando a lo largo de los años. Desde su punto de vista más maduro, Bohr, consideraba que la interpretación de una teoría física tiene que depender de la práctica experimental, la cual presupone una descripción clásica de los aparatos de medida experimental. Los conceptos clásicos, son por lo tanto necesarios en cualquier descripción de la experiencia física para poder entender lo que estamos haciendo y ser capaces de explicar los resultados, en particular en la descripción de fenómenos cuánticos que se presentan en los experimentos. En estos casos, Bohr, limita el uso de los conceptos clásicos a la manifestación del resultado de una medida del experimento. Los conceptos clásicos son simplemente explicaciones de conceptos comunes que son ya un resultado de la adaptación al mundo, y son estos y las condiciones de su aplicación los que determinan las condiciones para el conocimiento objetivo. Es por esto que, en la física cuántica, las propiedades cinemáticas y dinámicas pueden atribuirse significativamente al sistema sólo en relación con algunos resultados experimentales reales, mientras que en la física clásica se atribuyen dichas propiedades al sistema independientemente de si estamos observándolo o no. Además, es el uso del cuadrado del módulo de la función de onda que representa al sistema en observación el que permite expresar una densidad de probabilidad para el resultado de la medición. La función de onda puede tener un carácter epistemológico, sin embargo, es el formalismo el que se puede utilizar para predecir el resultado de una medida. Nótese que Bohr no habla nunca sobre el colapso del paquete de ondas, tampoco es que hiciera uso de él, ya que eso significaría que uno debe entender la función de onda como algo físicamente real.

### **3.3. Interpretación de De Broglie-Bohm (o de la onda piloto).**

Esta interpretación fue desarrollada por Louis de Broglie en 1927 y extendida por David Bohm en 1952. Es un ejemplo de lo que se denomina una interpretación de variables ocultas de la Mecánica Cuántica, ya que la función de onda que representa a un sistema, en esta interpretación, proporciona únicamente una descripción parcial, la cual es completada por la especificación de las posiciones de las partículas que forman el sistema[14]. Las posiciones de las partículas serían, en este caso, las variables ocultas.

En la corriente principal de esta interpretación, la función de onda se considera como algo real, al contrario que en la interpretación de Copenhague, que evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger. Mientras tanto, las partículas (i.e. sus posiciones) que forman un sistema, evolucionan en función de la llamada “ecuación guía”, la cual expresa las velocidades de estas

en términos de la función de onda. Por lo tanto, en la interpretación de De Broglie-Bohm, un sistema de partículas evoluciona de forma determinista. Entonces, cada partícula tendrá una trayectoria bien definida independientemente del observador, sin embargo, este, tendrá un conocimiento limitado sobre cuál es esta trayectoria (por tanto de la posición y el momento), y es este conocimiento incompleto de la trayectoria de la partícula lo que cuenta en la relación de incertidumbre. Todo lo que uno puede saber en un momento dado sobre una partícula está descrito por la función de onda.

Bohm, demostró explícitamente que introduciendo parámetros en la mecánica de ondas no relativista, se podría ayudar a transformar una descripción indeterminista en una determinista, en la que la referencia obligada al observador, podría ser eliminada. Sin embargo, esto tiene un coste, la pérdida de localidad. Como hemos dicho antes, en esta interpretación, estos parámetros son las posiciones de las partículas. Por lo tanto, para Bohm, el estado de un sistema de  $N$  partículas está descrito por su función de onda  $\Psi = \Psi(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N)$  en el espacio de posibles configuraciones de  $q$  del sistema, junto con su configuración actual  $Q$  definida por las posiciones reales de sus partículas  $\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_N$ . La función de onda evolucionaría con la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

mientras que las posiciones lo harían con la ecuación guía, cuya expresión es:

$$\frac{d\vec{Q}_k}{dt} = \frac{\hbar}{m_k} \text{Im} \left[ \frac{\Psi^* \vec{\nabla}_k \Psi}{\Psi^* \Psi} \right] (\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_N)$$

donde  $m_k$  es la masa de la partícula  $k$ -ésima y  $\vec{\nabla}_k = \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right)$  es el gradiente con respecto a las coordenadas genéricas  $\vec{q} = (x_k, y_k, z_k)$  de la misma.

*Demostración.* (Si se desea ver la demostración formal ver [15] en la bibliografía.)

Aquí no llevaremos a cabo una demostración del todo formal. Nuestra intención principal es dar una idea de como Bohm llegó a la expresión de la ecuación guía e interpretar el término de potencial cuántico que aparece en la demostración.

Para ver nuestra intención, nos basta con realizar el procedimiento que desarrolló Bohm para una única partícula.

Supongamos una función de onda de la forma:

$$\Psi = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) = R \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$$

donde  $S$  tiene unidades de acción y  $\rho = R = |\Psi|^2$ . Supongamos también que esta función de onda es solución de la ecuación de Schrödinger, por lo tanto:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi$$

Si ahora insertamos la forma de la función de onda en la ecuación de Schrödinger, operamos y separamos la parte real y parte imaginaria, obtendremos las dos siguientes expresiones:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + V = 0 \longrightarrow \text{Parte Real}$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{R^2 \vec{\nabla} S}{m} \right) = 0 \longrightarrow \text{Parte Imaginaria}$$

Ahora bien, para obtener una única solución de la ecuación de Schrödinger  $\forall t$ , tenemos que especificar una condición inicial para la función de onda tal que  $\Psi_0(\vec{Q}) = \Psi(\vec{Q}, 0) \forall \vec{Q}$ . De forma equivalente, tendremos que especificar también las condiciones iniciales de las funciones  $R$  y  $S$  tal que:

$$R_0(\vec{Q}) = R(\vec{Q}, 0) \quad ; \quad S_0(\vec{Q}) = S(\vec{Q}, 0)$$

Ahora, si consideramos  $\vec{\nabla} S$  como un momento lineal, podemos ver que la ecuación correspondiente a la parte real, tiene la forma clásica de la ecuación de Hamilton-Jacobi, con un término extra. Este término extra  $Z = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$  es lo que Bohm llamó: potencial cuántico, y que según él, es el responsable de todos los misteriosos efectos de la Mecánica Cuántica. Finalmente, al considerar  $\vec{\nabla} S$  como un momento lineal, tendremos que  $m \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{\nabla} S$ , expresión que coincide con la ecuación guía descrita (no tiene la forma exacta que la expresión que hemos definido, pero si en esta introducimos la forma de la función de onda y desarrollamos el segundo miembro, se obtendría de forma inmediata.) ■

Entonces, para un sistema de N-partículas, estas dos ecuaciones (junto con la especificación detallada del hamiltoniano, incluyendo todas las interacciones que contribuyen a la energía potencial) definen completamente la mecánica Bohmiana. Por lo tanto, con este determinismo de las partículas en movimiento se explicarían todos los fenómenos de la Mecánica Cuántica no relativista.

La velocidad, tal como se expresa en la ecuación guía, de cualquier partícula de un sistema de N-partículas, normalmente, dependerá de las posiciones

de otras partículas, posiblemente distantes, cada vez que se “enrede” la función de onda del sistema, i.e., no será un producto de la función de onda de una sola partícula. Esto manifiesta la no localidad de la interpretación, la cual deriva de la no localidad integrada en la estructura de la teoría cuántica estándar. Esta no localidad se origina a partir de una función de onda en el espacio de configuración, una abstracción que, en términos generales, combina o une, partículas distantes en una sola realidad irreducible. Por lo tanto, la relación de velocidad no local en la ecuación guía no es más que un aspecto de la no localidad de la mecánica de Bohm.

El colapso de la función de onda en la interpretación de Bohm puede considerarse como un proceso efectivo. Este colapso de la función de onda que en la interpretación de Copenhague debe postularse, emerge aquí de manera natural. El elemento clave aquí es la noción de la función de onda condicional de un subsistema perteneciente a un sistema mayor[14]. Dado que la observación implica la interacción, un sistema bajo observación no puede ser un sistema cerrado, sino más bien un subsistema de un sistema más grande. Entonces, la configuración de este sistema más grande se divide, naturalmente, en la configuración del subsistema ‘x’ y la configuración del entorno del subsistema ‘y’ (aparato de medida). El sistema compuesto está descrito por una función de onda “ $\Psi$ ”, la cual evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger. Puede surgir entonces la pregunta, de qué se entiende por la función de onda del subsistema. La respuesta estaría dada por la función de onda condicional antes citada, la cual es una función natural de ‘x’ obtenida a partir de la función de onda del sistema compuesto en la que se ha introducido explícitamente la configuración del entorno ‘y’:

$$\psi(x) = \Psi(x, y)$$

La función de onda condicional satisface la ecuación de Schrödinger para el subsistema ‘x’ con la condición de que este se haya desacoplado adecuadamente del entorno ‘y’[14].

En esta interpretación, entonces, se intenta abordar el problema de la medida con lo que es llamado efecto de decoherencia, el cual, en el marco de De Broglie-Bohm, explica como un estado cuántico entrelazado puede dar lugar a un estado físico clásico (no entrelazado). En este contexto, el proceso de decoherencia implica que un estado coherente de un sistema cuántico concreto evoluciona, tras la medida, hacia otro estado que combina al sistema y al entorno (resto del universo) en el que se ha perdido cualquier rastro de la coherencia inicial.

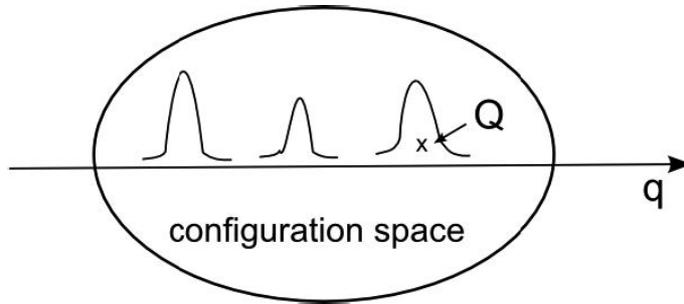


Figura 3.2: Aparente colapso por decoherencia[16].

La interacción del sistema con el dispositivo de medida produce como resultado que el solapamiento entre las componentes de la función de onda correspondientes a los posibles resultados de la medida puede considerarse nulo a todos los efectos prácticos (colapso efectivo). Sin ese solapamiento puede prescindirse del efecto dinámico de las ramas vacías (aquellas en las que no se encuentra la partícula o sistema cuántico medido –recordemos que en la interpretación de De Broglie-Bohm todo sistema macroscópico o microscópico tiene una posición bien definida en todo instante) sobre la evolución posterior de la partícula[15][17].

### 3.4. Interpretación de Muchos Universos (Many Worlds).

La interpretación de muchos universos fue desarrollada por Hugh Everett en 1957. Dicha interpretación de la Mecánica Cuántica sostiene la existencia de muchos universos, como el nuestro, en paralelo[18]. Es decir, que existe una gran cantidad de universos a parte del universo del que somos conscientes.

Esta existencia de otros universos hace que sea posible eliminar la aleatoriedad y la acción a distancia de la teoría cuántica. Si realizamos un experimento cuántico con diferentes resultados posibles, se obtienen todos los resultados, solo que cada uno de ellos se obtiene en un universo diferente, a pesar de que sólo seamos conscientes del resultado que hemos visto en nuestro universo. Por lo tanto, la interpretación de Everett nos dice que hay una cantidad muy grande, tal vez infinita, de universos, y todo lo que podría haber sucedido en nuestro pasado, pero no lo hizo, se ha producido en algún otro universo o universos.

La interpretación de Muchos Universos se compone de dos partes:

- i) Una teoría matemática que produce la evolución temporal del estado cuántico (único) del Multiverso (suma total de todos los universos). La cual se resume esencialmente en la ecuación de Schrödinger.

- ii) Una prescripción que establece una correspondencia entre el estado cuántico del Multiuniverso y nuestras experiencias.

Podemos notar entonces que el concepto de universo en esta interpretación pertenece a la parte ii), no es una entidad matemática rigurosamente definida, sino un término definido por nosotros en la descripción de nuestra experiencia.

Si hacemos una analogía, con la parte matemática de esta interpretación se obtienen muchos menos resultados que, por ejemplo, en la interpretación de Bohm. La ecuación de Schrödinger en sí no explica por qué experimentamos resultados definitivos en las mediciones cuánticas. Por el contrario, en la interpretación de Bohm, es la parte matemática la que produce casi todo. El **análogo** de ii) sería el postulado según el cual sólo las "posiciones" de Bohm corresponden a nuestra experiencia. Son las posiciones de todas las partículas las que producen la imagen familiar del (único) universo del que somos conscientes.

Siguiendo con la parte matemática, en la interpretación de Muchos Universos, el concepto de probabilidad no puede ser introducido de una forma simple como en las teorías de colapso. Veamos esto con un ejemplo para su mejor comprensión: Si queremos realizar un experimento cuántico con dos resultados posibles, tales que la Mecánica Cuántica estándar predice la probabilidad  $1/3$  para el resultado 'A' y  $2/3$  para el resultado 'B', entonces, de acuerdo con la interpretación de Muchos Universos, tanto el universo con el resultado 'A' como el universo con el resultado 'B', existirán. No tiene sentido preguntar: ¿Cuál es la probabilidad de que encontremos 'A' en lugar de 'B'? porque se va a corresponder a ambos. En un universo se observará 'A' y en otro se observará 'B'.

Sin embargo, si el concepto de probabilidad en esta interpretación es problemático, es posible explicar nuestra ilusión(imagen) de eventos probabilísticos aparentes[18].

Un apartado importante de esta interpretación es que elimina el colapso de la función de onda en el Multiverso. Esta interpretación es determinista para el Multiverso físico, ya que la función de onda obedece una ecuación de onda determinista en todo momento, y explica por qué un universo parece ser indeterminista para los observadores. Todos los posibles resultados de una medición están envueltos en la función de onda multiversal, aunque el observador asociado a su universo particular sólo tiene conocimiento de los resultados individuales. Cada universo, dentro del Multiverso, parece indeterminista con el colapso normal de la función de onda, pero en el plano objetivo, que incluye todos los resultados, el determinismo se restaura[19].

También, la interpretación de Muchos Universos permite una explicación local de nuestro universo. El estudio de Deutsch y Hayden[10] del flujo local de información usando la representación de Heisenberg en un marco de infor-

mación cuántica (en sistemas cuánticos entrelazados) es uno de los métodos para analizar el carácter local de la interpretación de Muchos Universos.

### 3.5. Modificación de los Axiomas.

En esta sección analizaremos como se modifican los Axiomas de la Mecánica Cuántica según la interpretación que estemos tratando.

#### 3.5.1. Interpretación de Copenhague.

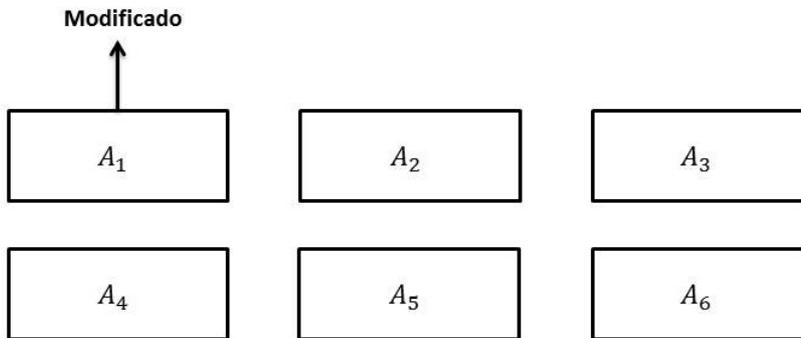


Figura 3.3: Modificación de los Axiomas de la Mecánica Cuántica en la interpretación de Copenhague.

Como podemos ver en el esquema superior, en la interpretación de Copenhague el primer Axioma se ve modificado, pues en la interpretación ortodoxa (volvemos a resaltar que es la que se ve en la mayoría de los textos) la función de onda representa el estado del sistema. Mientras tanto, en la interpretación de Copenhague, la función de onda tiene un carácter más epistemológico que en la interpretación ortodoxa y caracteriza al conjunto que engloba al sistema más el aparato de medida.

#### 3.5.2. Interpretación de De Broglie-Bohm.

En la interpretación de De Broglie-Bohm, como podemos ver esquemáticamente, el primer Axioma se ve modificado, ya que la función de onda del sistema no es suficiente para representar el estado del sistema, pues hay que añadirle las posiciones definidas de las partículas.

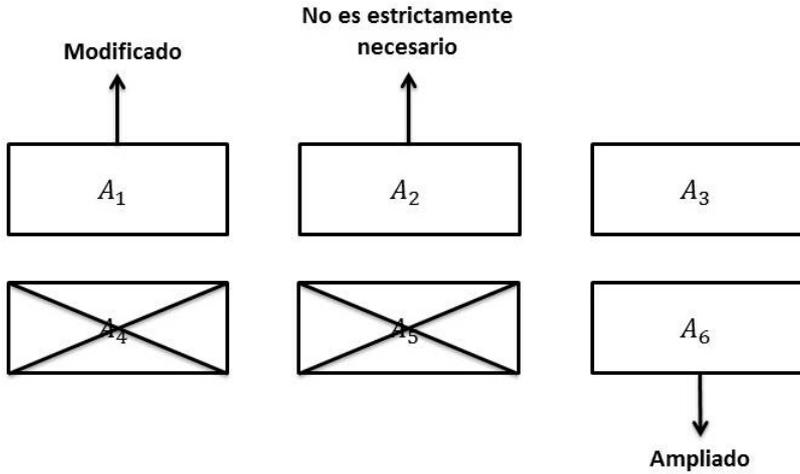


Figura 3.4: Modificación de los Axiomas de la Mecánica Cuántica en la interpretación de De Broglie-Bohm.

El segundo Axioma, no es estrictamente necesario, pues las cantidades físicas se podrían determinar mediante cálculos a partir de las posiciones definidas de las partículas.

El cuarto y quinto Axioma desaparecerían, ya que se obtienen de los otros Axiomas. El colapso efectivo de la función de onda estaría explicado, ya que este surge de manera natural en esta interpretación.

Por último, el sexto Axioma se ve ampliado por la inclusión de la ecuación guía.

### 3.5.3. Interpretación de Muchos Universos.

En la interpretación de Muchos Universos, volvemos a ver que el cuarto y el quinto Axioma son deducibles de los demás Axiomas. Además, surgen problemas con el concepto de probabilidad al darse todos los resultados posibles de una medición en los diferentes universos existentes.

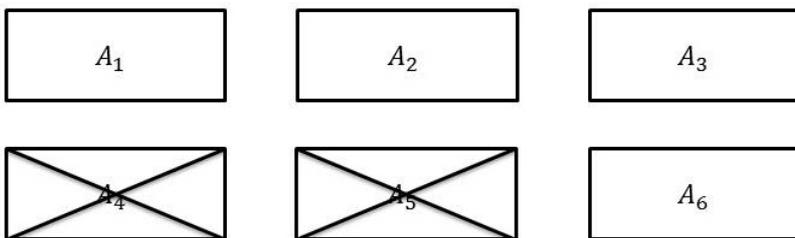


Figura 3.5: Modificación de los Axiomas de la Mecánica Cuántica en la interpretación de Muchos Universos.

## 3.6. Pilares de la racionalidad clásica.

Como ya se había citado con anterioridad, en el estado actual de la Mecánica Cuántica, nos vemos forzados a sacrificar al menos una de las tres propiedades clásicas en la descripción de la naturaleza:

- *Principio de Localidad:* Las acciones e influencias se propagan en el espacio físico de forma continua y con una velocidad de propagación límite ( $c$ , velocidad de la luz).
- *Principio de Causalidad:* Cada evento, cada cambio de un sistema, tiene una causa.
- *Principio de Realidad:* Los sistemas físicos existen en el espacio y el tiempo, al igual que los procesos físicos.

Estos principios son los que nos permiten, en Mecánica Clásica, describir el estado de un sistema.

Veamos a continuación como encaran las interpretaciones principales de la Mecánica Cuántica estos principios de la racionalidad.

### 3.6.1. Interpretación de Copenhague.

La interpretación de Copenhague únicamente tiene en cuenta los resultados obtenidos en los experimentos, por lo tanto, desde el punto de vista de esta interpretación, no tiene sentido hablar del sistema antes de hacer una medición. Podríamos decir incluso, de manera burda, que es como si no existiera mundo cuántico independientemente del proceso de medida. Este carácter subjetivo de la interpretación tiene como consecuencia una carencia de realismo, quizás el pilar más tocado en esta interpretación.

En el caso de abordar la causalidad, la interpretación de Copenhague, se considera no causal, debido a la indeterminación o aleatoriedad asociada al proceso de medida. Sin embargo, en esta interpretación, la evolución de una partícula, mientras no haya una medición, está dada por la ecuación de Schrödinger. Esto implica la causalidad de la interpretación de Copenhague mientras no se produzca un proceso de medición.

Por otra parte, la forma en la que Bohr respondió al problema planteado por el artículo EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) fue argumentando[3] que los estados de un par de partículas acopladas no se pueden considerar aisladamente, de la misma manera que el estado de un objeto y el estado del instrumento de medida en un experimento son dinámicamente inseparables durante el proceso de medición.

### 3.6.2. Interpretación de De Broglie-Bohm.

La interpretación de De Broglie-Bohm se caracteriza principalmente por su no localidad, pues en esta interpretación, la evolución de la partícula depende tanto de la ecuación de Schrödinger como de la ecuación guía descrita en la sección 3.3. El hecho de la no localidad viene precisamente de observar esta última, ya que podemos ver como la velocidad de la partícula que estamos tratando, depende de las coordenadas de todas las demás partículas que componen el sistema, es decir, que un cambio en las posiciones de las demás partículas, produciría un cambio instantáneo en la velocidad de nuestra partícula.

Por otra parte, la ecuación de Schrödinger y la ecuación guía permiten considerar a esta interpretación como una interpretación causal, de hecho fue este el nombre que se le puso originalmente, pues esta última ecuación permite trazar las trayectorias de las partículas. Además, recordemos que en esta interpretación las posiciones están bien definidas, lo que implica el realismo de la interpretación.

De todos modos, el realismo de la interpretación de De Broglie-Bohm está asociado a la caracterización del sistema únicamente mediante su posición en todo instante y su función de onda.

### 3.6.3. Interpretación de Muchos Universos.

La función de onda del Multiverso está definida en el espacio de configuraciones. La densidad de probabilidad de cada partícula en el espacio-tiempo, de dimensión  $3+1$ , es el concepto derivado de la función de onda del Multiverso que constituye la caracterización de los sistemas en cada universo particular, y que por tanto conecta con la experiencia de los observadores[18]. Esta interpretación es por tanto realista, pero su caracterización de los sistemas no es tan inmediata como en De Broglie-Bohm. Por otra parte, la interpretación es causal dado que la única ecuación dinámica es la ecuación de Schrödinger. Además, la interpretación es local según se analizó en la sección 3.4 refiriéndose al estudio de Deutsch y Hayden[10]. También, de forma directa, se puede observar que la hipótesis del teorema de Bell que requiere la obtención de un único resultado de todos los posibles en un experimento, no se aplica a la interpretación de Muchos Universos[20].

## 3.7. Representación en ejes cartesianos.

Con la intención de dar una explicación más visual, utilizando el análisis hecho en la sección anterior, podríamos representar las distintas interpretaciones en un sistema cartesiano, cuyos ejes son los pilares de la racionalidad

clásica: Localidad ( $L$ ), Causalidad ( $C$ ) y Realismo ( $R$ ).

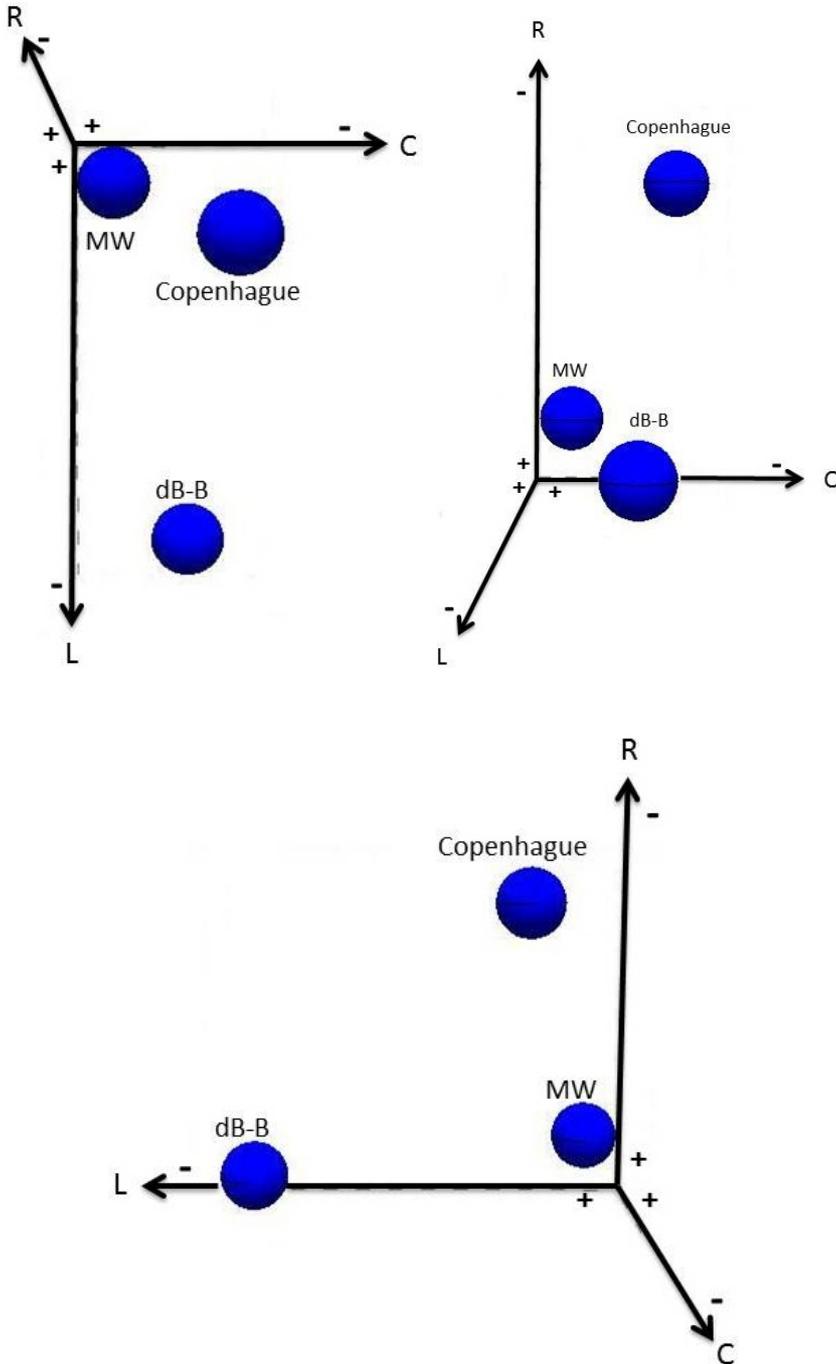


Figura 3.6: Representación teórica de las interpretaciones principales en un eje cartesiano.

Notemos que en la representación utilizamos una esfera, y no un punto exacto, para fijar las interpretaciones, pues la posición de estas en nuestro

sistema cartesiano depende de las distintas subinterpretaciones e incluso en el caso de Copenhague, de los distintos puntos de vista internos. Nótese también el convenio de signos utilizado, pues aquella hipotética interpretación que estuviera en el origen, sería una interpretación que conservaría las tres propiedades clásicas.

Las posiciones que ocupan en el eje cartesiano las tres interpretaciones se corresponden con el análisis realizado interpretación a interpretación en la sección anterior. Sin más que la intención de destacar lo más relevante de la representación, notemos la ausencia de realismo en la interpretación de Copenhague o la pérdida de localidad en la interpretación de De Broglie-Bohm, además de la gran proximidad de la interpretación de Muchos Universos al origen.

Para finalizar con esta sección, podemos hablar del superdeterminismo[21], el cual estaría en el origen, pues esta teoría lo que nos dice es que todo suceso, esta ya determinado desde el Big Bang, i.e., todo lo que sucede, vaya a suceder o haya sucedido, ya está, estaba o estará determinado. Así pues, todo aquello que hacemos, no lo hacemos por elección propia. Luego notemos que esta teoría renuncia al libre albedrío, lo cual es su punto débil.

### 3.8. Teoremas No-Go.

El conjunto de teoremas que comienzan con von Neumann, siguen con Bell, Kochen-Specker y más recientemente el teorema de “Free Will” de Conway y Kochen, el teorema de Colbeck-Renner y el teorema PBR (Pusey-Barrett-Rudolph), entre otros, constituyen lo que se conoce en Mecánica Cuántica como teoremas “No-Go” [22], cuyo propósito es demostrar la imposibilidad de ciertos resultados o propiedades en el ámbito de la Mecánica Cuántica. El objetivo de estos teoremas es clarificar la estructura fundamental de la Mecánica Cuántica. En ciertos casos, las principales hipótesis explícitas, o en ocasiones implícitas, resultan ser muy controvertidas. Sin embargo, pese a estas dificultades, estos teoremas han constituido un elemento central en el avance de los fundamentos cuánticos.

# Capítulo 4

## Análisis del experimento de Young.

En este capítulo trataremos el experimento de Young de la doble rendija, el cual, según Richard Feynman[23], es el corazón de la Mecánica Cuántica.

### 4.1. Descripción del experimento.

Consideremos este experimento realizado con electrones, cuyo montaje experimental es el que podemos ver representado en la siguiente figura.

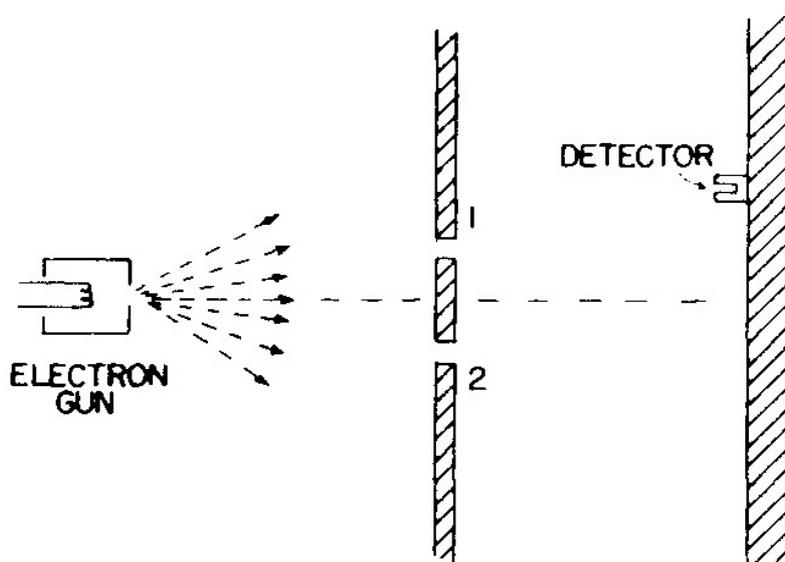


Figura 4.1: Esquema del experimento de Young con electrones[23].

En la parte izquierda nos encontramos con un cañón de electrones, el cual consiste en un hilo conductor calentado mediante una corriente eléctrica y rodeado por una caja metálica con un pequeño orificio. Si el hilo se encuentra a

un potencial negativo respecto a la caja, los electrones emitidos se acelerarán hacia las paredes de la misma y algunos atravesarán el orificio. Aproximadamente, todos los electrones que salgan del cañón tendrán la misma energía.

Delante del cañón hay situada una pared delgada con dos rendijas, y más allá de esta, nos encontramos otra pared que se utiliza como pantalla de observación, en la cual hay situado un detector. Hemos de resaltar que este era un experimento mental hasta que en 1974 se consiguió realizar.

Ahora, (suponiendo que no hemos tratado nunca con esta experiencia) dado que los electrones llegan a la pantalla de observación, podemos suponer que estos han pasado a través de la rendija 1 o de la rendija 2. Por lo tanto, podemos dividir todos los electrones que llegan a la pantalla de observación en dos grupos: (1) los que llegan pasando por la rendija 1 y (2) los que llegan pasando por la rendija 2. De este modo, la curva de observación debería ser la suma de los efectos de los electrones que llegan a través de la rendija 1 y de los que llegan de la rendija 2. Si comprobamos esta idea experimentalmente, tapando la rendija 1 y midiendo los electrones que llegarían de la rendija 2 ( $P_2$  en la figura siguiente) y viceversa ( $P_1$  en la figura siguiente), además de hacer la medida con las dos rendijas abiertas ( $P_{12}$  en la figura siguiente) podemos ver evidentemente que  $P_{12} \neq P_1 + P_2$ .

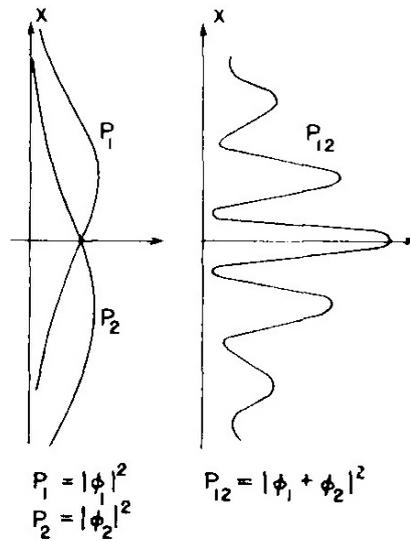


Figura 4.2: Representación de probabilidades[23].

Lo que sucede en la pantalla de observación se puede describir mediante dos funciones complejas dependientes de  $x$ , que llamaremos  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ . El cuadrado del módulo de  $\Phi_1$  nos da el efecto cuando está abierta únicamente la rendija 1, i.e., la probabilidad  $P_1 = |\Phi_1|^2$ . De la misma forma,  $\Phi_2$  nos da el efecto únicamente para la rendija 2,  $P_2 = |\Phi_2|^2$ . Por lo tanto, el efecto combinado de las dos rendijas será  $P_{12} = |\Phi_1 + \Phi_2|^2$ .

Podemos entonces concluir diciendo que los electrones llegan como partículas, y la probabilidad de llegada de estos se distribuye como si la distribución se tratara de una onda, pues aparecen términos de interferencia. En este sentido que un electrón se comporta “algunas veces como una partícula y otras como onda”.

Como podemos esperar, al tratarlo en este trabajo, existe una gran diversidad de interpretaciones en el hecho de cómo la naturaleza obra de esta forma. A continuación veremos el tratamiento de esta experiencia según las diferentes interpretaciones principales.

## **4.2. Experimento de Young en la interpretación de Copenhague.**

Como ya hemos visto, la interpretación de Copenhague, no se plantea preguntas que vayan más allá de las fórmulas matemáticas y de los resultados de los experimentos que nos permiten obtener algún conocimiento. Entonces, desde el punto de vista de esta interpretación, no podemos hablar de la ubicación de los electrones entre el momento en que se emiten en el cañón de electrones y el momento en que se detectan en la pantalla de observación, pues para poder decir algo sobre el lugar en que se encuentran en un momento determinado, habría que detectarlos. Por lo tanto, sólo podemos hablar de las probabilidades de impacto de los electrones en la pantalla de observación, pues es esto lo único que nos puede ayudar a predecir los resultados.

## **4.3. Experimento de Young en la interpretación de De Broglie-Bohm.**

Según la interpretación de De Broglie-Bohm, los electrones tienen una posición inicial y siguen una trayectoria cuya velocidad está determinada por la ecuación guía. Hemos de recordar que las posiciones de los electrones están definidas, sin embargo el observador no tiene acceso a ellas. Por otra parte, teniendo en cuenta esta interpretación, podríamos llevar a cabo una simulación del experimento de Young mediante la elaboración, al azar, de las posiciones iniciales de los electrones en el paquete de ondas inicial.

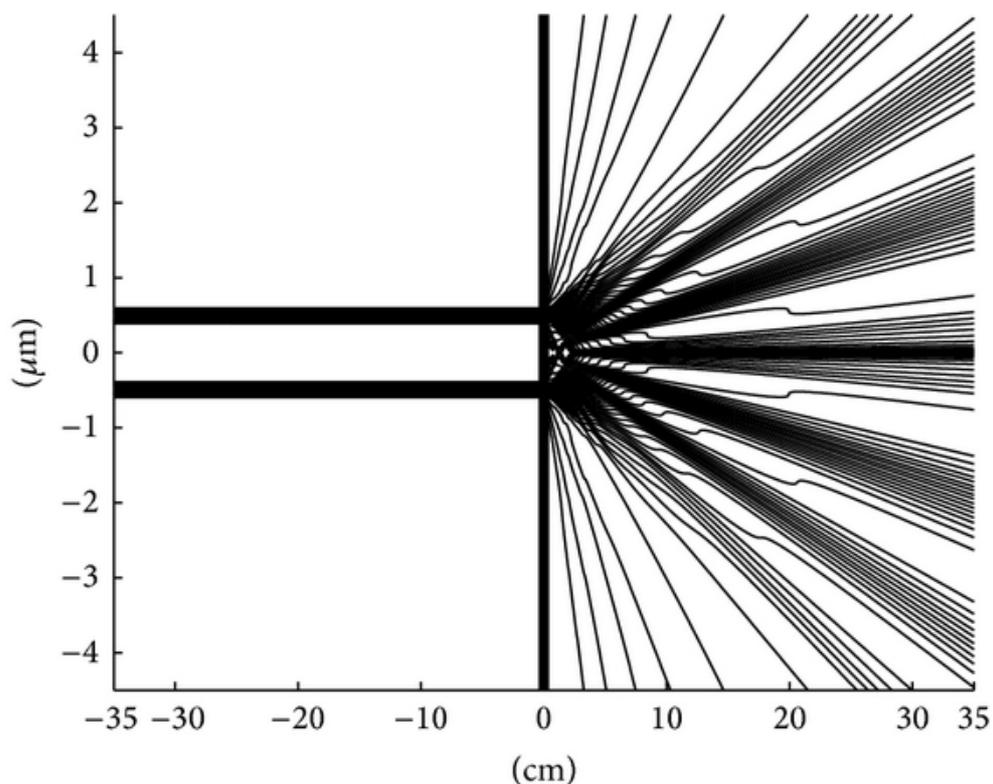


Figura 4.3: Simulación para 100 trayectorias posibles de un electrón[24].

En la figura 4.3 se muestra, después de su posición inicial de partida, 100 posibles trayectorias cuánticas de un electrón que pasa a través de una de las dos rendijas. La siguiente imagen, figura 4.4, se centra en estas trayectorias una vez atravesadas las rendijas.

Las diferentes trayectorias explicarían tanto el impacto de los electrones en la pantalla de observación como las franjas de interferencia, las cuales se observan después de un cierto período de tiempo en que los impactos de los electrones en la pantalla de observación se vuelven lo suficientemente numerosos, pues la posición de un impacto es simplemente la posición del electrón en el momento del impacto.

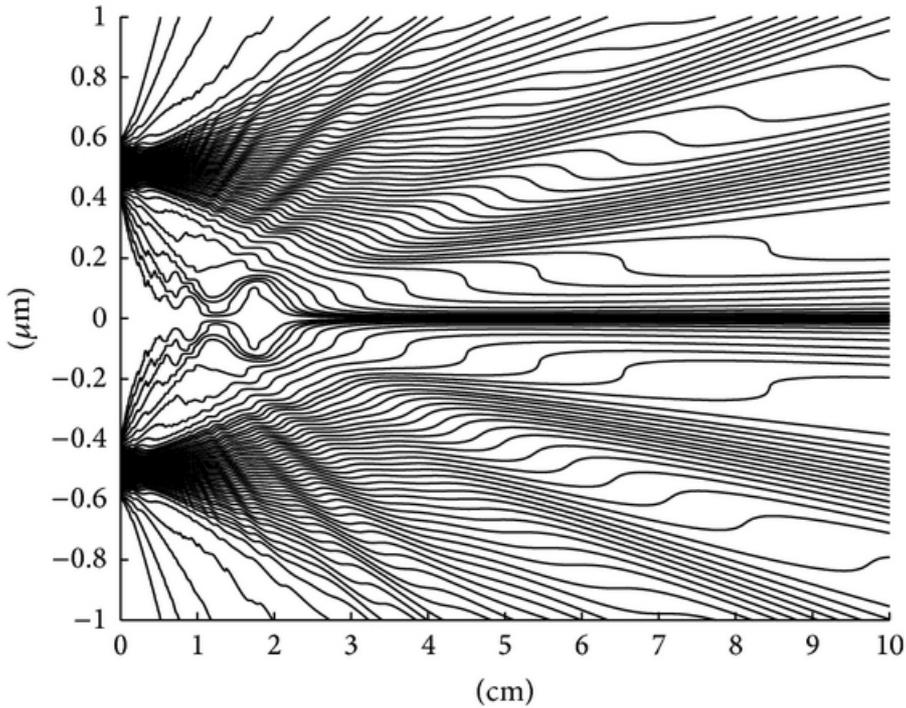


Figura 4.4: Simulación para 100 trayectorias posibles de un electrón después de atravesar las rendijas[24].

Nótese que los impactos en la pantalla de observación son posiciones reales del electrón, por lo tanto, podemos notar que los Axiomas de medida pueden ser explicados de forma trivial como ya vimos en la sección 3.5.

## 4.4. Experimento de Young en la interpretación de Muchos Universos.

Por último, en la interpretación de Muchos Universos, este experimento se explicaría diciendo que cada uno de los posibles resultados del impacto de los electrones sobre la pantalla de observación, suceden en los distintos universos existentes.

Veamos esto con ayuda gráfica. En la figura siguiente podemos ver algunos impactos de electrones, los cuales han sido disparados uno a uno a lo largo de un período de tiempo  $t$ .

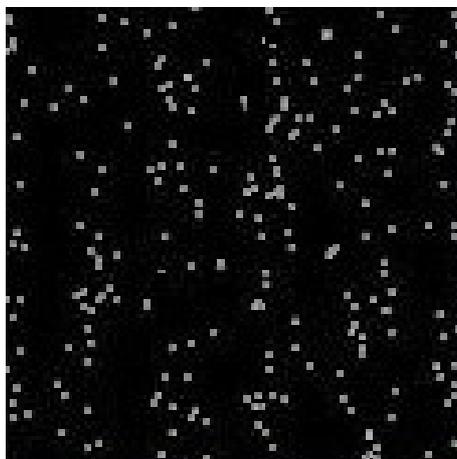


Figura 4.5: Impactos de los electrones sobre la pantalla de observación en un período de tiempo  $t$ .

Como sabemos, en la interpretación de Muchos Universos, es la medida la que produce la división de estos, i.e., las diferentes ramas en las que se producen todos los resultados posibles. Así pues, si disparáramos un único electrón, en nuestro universo veríamos un sólo destello en una posición dada de nuestra pantalla de observación. Sin embargo, lo que nos dice esta interpretación, es que en los demás universos, este destello ocupa distintos lugares en la pantalla de observación.

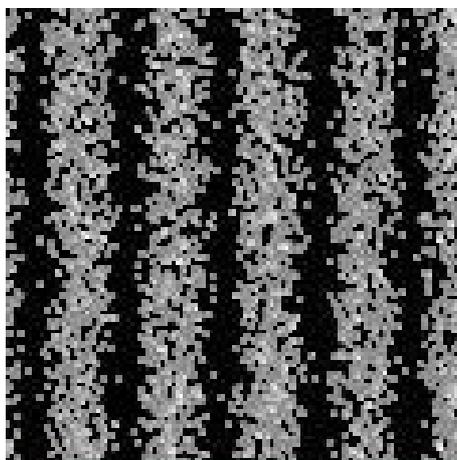


Figura 4.6: Impactos de los electrones sobre la pantalla de observación en un período de tiempo  $t' \gg t$ .

Entonces, con esta explicación, la interpretación de Muchos Universos explica la figura interferencial en la que aparecen los máximos y mínimos diciendo que la interferencia cuántica es debida a la interacción entre las distintas ramas de los universos. Podríamos decir, para intentar dar un mejor entendimiento, que la figura 4.6, la cual se ha obtenido en nuestro universo habiendo

transcurrido un largo período de tiempo, desde la interpretación de Muchos Universos puede ser entendida como si únicamente se hubiera disparado un único electrón y esta imagen fuera la superposición de todos los destellos de los diferentes universos, pues en cada uno de ellos, el destello del electrón ocuparía un posible lugar en la pantalla de observación, dando así la figura interferencial. Nótese de nuevo que sólo hemos disparado un electrón, luego si consideramos la figura 4.6 como la superposición de todas las posiciones ocupadas por este en los diferentes universos, podemos hacernos una idea de la gran cantidad de universos que tenemos que suponer que existen.



# Conclusiones.

En este trabajo hemos tratado de hacer un estudio conceptual de algunas de las interpretaciones de la Mecánica Cuántica, las cuales surgen como necesidad de dar una respuesta a los problemas de significado de la teoría cuántica.

Las interpretaciones han demostrado, además, ser decisivas a la hora de sugerir nuevos caminos en la experimentación y en la profundización en el conocimiento de la naturaleza como puede demostrar el desarrollo actual de la información cuántica. A su vez, los nuevos experimentos requieren y suscitan en muchos casos clarificaciones interpretativas. Sin embargo, ninguna de las interpretaciones desarrolladas hasta el presente conduce, aparentemente, a una descripción completamente satisfactoria del comportamiento de los sistemas físicos.

Por otra parte, la proliferación de interpretaciones es quizá indicativa de alguna carencia explicativa de la teoría cuántica para un sector creciente de científicos. En ese sentido, la posible convergencia hacia una interpretación común significaría, probablemente, un progreso decisivo en el conocimiento de la naturaleza. Esta interpretación de consenso no tiene por qué encontrarse necesariamente en el lado del racionalismo clásico, si no quizá en una teoría aun más compleja que la actual teoría cuántica.



# Bibliografía

- [1] C. Cohen-Tannoudji, *Quantum Mechanics*, Wiley-VCH, 1977.
- [2] F. Laloë, *Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes and theorems*, arXiv:quant-ph/0209123 (2002).
- [3] J. Faye, *Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.).  
<http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/qm-copenhagen/>
- [4] E. Dennis and T. Norsen, *Quantum Theory: Interpretation cannot be avoided*, arXiv: quant-ph/0408178 (2004).
- [5] C. A. Fuchs and A. Peres, *Quantum theory needs no “interpretation”*, Physics Today, 53, 70-71 (2000).
- [6] J. Bub, *Quantum Entanglement and Information*, in ed. Edward N. Zalta, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, (Winter 2010 Edition).  
<http://plato.stanford.edu/archives/win2010/entries/qt-entangle/>
- [7] W. Mückenheim, *A review of extended probabilities*, Phys. Rep. 133, 337–401 (1986).
- [8] C. Baladrón, *In Quantum Foundations and Open Quantum Systems*, edited by T. Nieuwenhuizen et al. World Scientific, Singapore, Ch. 13., 2014.
- [9] D. F. Styer, M. S. Balkin, K. M. Becker, M. R. Burns, C. E. Dudley, S. T. Forth, J.S. Gaumer, M. A. Kramer, D. C. Oertel, L. H. Park, M. T. Rinkoski, C. T. Smith and T. D. Wotherspoon, *Nine formulations of quantum mechanics*, Am. J. Phys. 70, 288–297 (2002).
- [10] D. Deutsch and P. Hayden, *Information flow in entangled quantum systems*, Proc.R. Soc. Lond. A 456, 1759–1774 (2000).
- [11] R. Hanson, *Loophole-free Bell inequality violation using spin separated by 1.3 kilometres*, Nature 526, 682-686 (2015).

- [12] M. Schlosshauer, J. Kofler and A. Zeilinger, *A Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics*, arXiv:quant-ph/1301.1069 (2013).
- [13] T. Norsen and S. Nelson, *Yet Another Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics*, arXiv:quant-ph/1306.4646 (2013).
- [14] S. Goldstein, *Bohmian mechanics*, in ed. Edward N. Zalta, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2013 Edition).  
<http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/qm-bohm/>
- [15] P. Holland, *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [16] M. Lienert, *Pilot wave theory and quantum fields*, 2011.  
<http://philsciarchive.pitt.edu/id/eprint/8710>
- [17] D. Dürr and S. Teufel, *Bohmian Mechanics. The Physics and Mathematics of Quantum Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [18] L. Vaidman, *Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.).  
<http://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/qm-manyworlds/>
- [19] M. C. Price, *The Everett FAQ*, February 1995.  
<http://www.hedweb.com/manworld.htm>
- [20] G. Bacciagaluppi, *Remarks on Spacetime and Locality in Everett's Interpretation*, in eds. Placek and Butterfield, pp. 105-122 (2002).
- [21] G. 't Hooft, *The Free-Will Postulate in Quantum Mechanics*, arXiv:quant-ph/0701097 (2007).
- [22] F. Laudisa, *Against the No-Go Philosophy of Quantum Mechanics*, arXiv:quant-ph/1307.3179 (2013)
- [23] Richard Feynman and Robert B. Leighton, *The Feynman lectures on physics volumen III: Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1965.
- [24] Michel Gondran and Alexandre Gondran, *Measurement in the de Broglie-Bohm Interpretation: Double-Slit, Stern-Gerlach, and EPR-B*, Physics Research International, vol. 2014, Article ID 605908, 16 pages, 2014.

- [25] R. E. Kastner, *Quantum nonlocality: not eliminated by the Heisenberg picture*, Found. Phys. 41, 1137–1142 (2011).
- [26] J. Ismael, *Quantum mechanics*, in ed. Edward N. Zalta, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2009 Edition).  
<http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/qm/>
- [27] G. Ghirardi, *Collapse theories*, in ed. Edward N. Zalta, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2011 Edition).  
<http://plato.stanford.edu/archives/win2011/entries/qm-collapse/>
- [28] A. Zeilinger, *A foundational principle of quantum physics*, Found. Phys. 29, 631–643 (1999).
- [29] L. Hardy, *Quantum theory from five reasonable axioms*, arXiv: quant-ph/0101012 (2001).
- [30] R. Clifton, J. Bub and H. Halvorson, *Characterizing quantum theory in terms of information-theoretic constraints*, Found. Phys. 33, 1561–1591 (2003).
- [31] D. Deutsch, *Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer*, Proc. R. Soc. Lond. A 400, 97–117 (1985).
- [32] S. Goldstein, *Bohmian mechanics and quantum information*, Found. Phys. 40, 335–355 (2010).